Manual do Aluno

MATEMÁTICA

11.º ano de escolaridade

Projeto - *Reestruturação Curricular do Ensino Secundário Geral em Timor-Leste*

Cooperação entre o Ministério da Educação de Timor-Leste, o Instituto Português de Apoio ao Desenvolvimento, a Fundação Calouste Gulbenkian e a Universidade de Aveiro
Financiamento do Fundo da Língua Portuguesa

Título
Matemática - Manual do Aluno

Ano de escolaridade
11.º Ano

Autores
Teresa Neto
José Bessa
Lucinda Serra

Coordenadora de disciplina
Teresa Neto

Consultor científico
João Pedro da Ponte

Colaboração das equipas técnicas timorenses da disciplina
Este manual foi elaborado com a colaboração de equipas técnicas timorenses da disciplina,
sob a supervisão do Ministério da Educação de Timor-Leste.

Ilustração
Joana Santos
Plural Design Unipessoal, Lda

Design e Paginação
Esfera Crítica Unipessoal, Lda.
Plural Design Unipessoal, Lda

Impressão e Acabamento
Centro de Impressão do Ministério da Educação e Cultura

ISBN
978-989-8547-39-2

Tiragem
1000 exemplares

1ª Edição

Conceção e elaboração
Universidade de Aveiro

Coordenação geral do Projeto
Isabel P. Martins
Ângelo Ferreira

Ministério da Educação e Cultura de Timor-Leste

2018

Índice

Unidade Temática

1

Sucessões

Unidade Temática

2

Trigonometria

Unidade Temática

3

Funções e Limites

METAS

Identificar, definir e representar graficamente sucessões sucessões de números reais

Identificar sucessões monótonas

Identificar se uma sucessão é limitada

Identificar e definir progressões ariméticas e geométricas

Identificar sucessões convergentes e divergentes

Determinar o limite de uma sucessão

Calcular a soma de todos os termos de uma progressão geométrica

Utilizar o método de indução matemática na demonstração de propriedades

Unidade Temática 1 | Sucessões

Subtema 1 - Sucessões

Subtema 2 - Limites infinitos

Subtema 1 - Sucessões

Conteúdos

Conceito de sucessão

Representação gráfica de uma sucessão

Sucessões monótonas

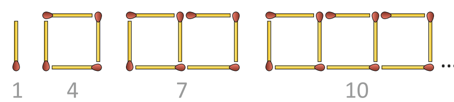
Sucessões limitadas

Progressões aritméticas

Progressões geométricas

Conceito de Sucessão

Observa a seguinte sequência em que estão representadas as quatro primeiras figuras, formadas com fósforos:



Contando o número de fósforos de cada figura, obtém-se a seguinte a sequência: 1, 4, 7, 10, 13, ...

Mantendo a regularidade na construção das figuras podemos responder à seguinte pergunta:

Quantos fósforos tem a 6ª figura?

Cada figura tem mais 3 fósforos que a anterior. E, mantendo a mesma lei de formação, a 5ª figura terá 13 fósforos, a 6ª terá 16 e assim sucessivamente.

Quando observamos a sequência dos números naturais 1,2,3,4,5,...... vemos que envolve outras considerações.

- Os números estão dispostos por uma certa ordem
- Conhecido um elemento conhecemos o seguinte
- Existe o primeiro elemento, mas não se consegue determinar um último elemento.

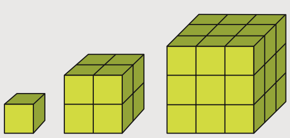
Fibonacci, no seu livro *Líber Abaci*, apresenta uma resolução para um prolema que ficaria conhecido por **Problema dos coelhos**.

Considere-se, no dia 1 de Janeiro, um casal de coelhos. Suponhamos que este casal gera um outro casal, no dia 1 de Fevereiro e assim sucessivamente em todos os meses do ano. Cada um dos novos casais gera, por seu lado, um casal de coelhos no dia 1 de cada mês, a partir do seu segundo mês de existência.

Quantos casais de coelhos haverá no fim do ano?

Tarefa 1

Considera a sequência numérica 1,8,27,..., que corresponde ao número de cubos que formam cada cubo da sequência apresentada.

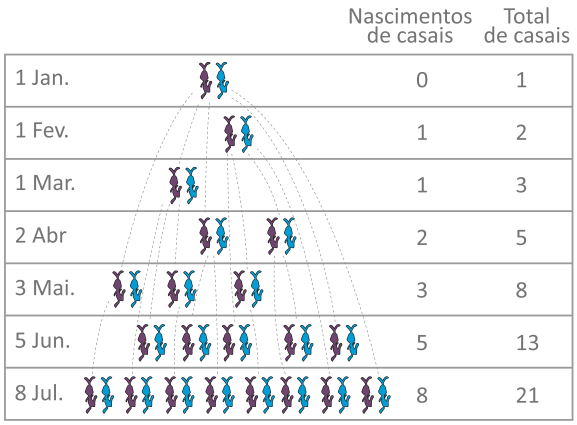


a) Quantos são os cubos que constituem o 4º termo da sequência geométrica?

b) Qual é a expressão que representa o número de cubos que formam o enésimo termo da ordem n?

c) Será que existe uma figura formada com 512 cubinhos?

Esquematicamente, temos:



Estes dados podem ser registados na seguinte tabela:

	Nº Nascimentos	Total Nº de casais
1 Janeiro	0	1
1 Fevereiro	1	2
1Março	1	3
1 Abril	2	5
1 Maio	3	8
1 Junho	5	13
1 Julho	8	21
(…)	(…)	(…)

Sendo *f* a função que à ordem de cada mês, faz corresponder o número de nascimentos (começando em fevereiro):

1º *mês*	$f(1)=1$
2º *mês*	$f(2)=1$
3º *mês*	$f(3)=f(1)+f(2)$
4º *mês*	$f(4)=f(2)+f(3)$
5º *mês*	$f(5)=f(3)+f(4)$

(…)

De forma geral verifica-se que :

$f(n)=f(n\text{-}2)+f(n\text{-}1)$, *para todo* $n \geq 3$.

Referência histórica

Fibonacci (1180-1250)

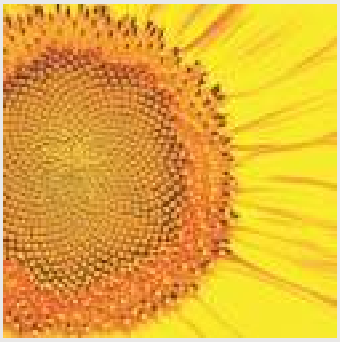
Um dos nomes mais conhecidos ligados ao estudo de sequências de números é sem dúvida Fibonacci.

Leonardo de Pisa, pertencia à família Fibonacci e na introdução da sua obra "*Liber Abaci*" referia--se a si próprio como *filio Bonacci*, cuja abreviatura levou a Fibonacci, como é geralmente conhecido.

O seu interesse pelos números surgiu ao acompanhar o seu pai, secretário da República de Pisa e diretor da Companhia Mercantil de Pisa, por terras banhadas pelo Mediterrâneo. O jovem aprendeu a calcular utilizando números hindo-arábicos e estudou matemática com os árabes.

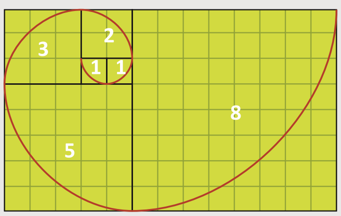
O seu interesse pelo cálculo foi progredindo e a sua sabedoria foi sendo reconhecida, ao ponto de ser convidado pela corte de Frederico II a participar num torneio sobre resolução de problemas. Resolveu todos os problemas que lhe foram propostos, incluindo o famoso "*problema dos coelhos*".

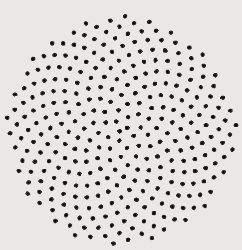
Curiosidade



Num girassol, as sementes formam espirais que estão organizadas como sequências de números de Fibonacci.

Os diagramas seguintes ilustra a espiral e forma de organização das sementes de um girassol





Podemos construir a seguinte sucessão de valores conhecida por **Sucessão de Fibonacci**:

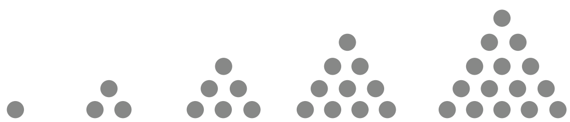
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 ,34, ………………

Números figurados

Na Grécia antiga, os Pitagóricos representavam os números por pontos em pergaminhos ou por pedras colocadas na areia, distribuindo-as segundo formas geométricas regulares cuja soma dava origem ao número representado.

É neste tipo de representação que surgem os chamados **números figurados: triangulares, quadrados, pentagonais etc**.

Números triangulares: 1; 3 ; 6 ; 10; 15 ;…

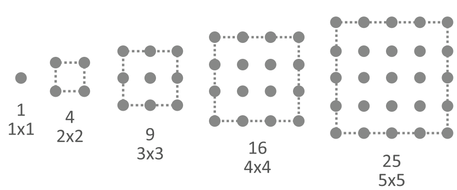


(…)

Observando os números triangulares podemos afirmar que, à exceção do primeiro termo, todos os outros termos se obtêm da seguinte forma:

$$t_1 = 1$$
$$t_2 = t_1 + 2 = 1 + 2 = 3$$
$$t_3 = t_2 + 3 = 1 + 2 + 3 = 6$$
$$t_4 = t_3 + 4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$
$$(\ldots)$$
$$t_n = t_{n-1} + \mathrm{n} = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n^2 + n}{2}\ ,\ n \in IN$$

Números quadrangulares: 1; 4; 9; 16; 25; ….



(…)

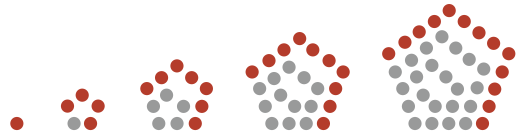
$$t_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2\ ,n \in IN$$

Números pentagonais: 1; 5; 12; 22; …

Tarefa 2

a) Qual é o décimo número triangular?

b) Qual é o sexto número quadrangular?



1 5 12 22 35 (...)

1 1+4 1+4+7 1+4+7+10 1+4+7+1+13

$$t_n = 1+4+7+\cdots+(3n-2) = \frac{n(3n-1)}{2}, n \in IN$$

Chama-se sucessão a toda função de domínio IN.

Uma sucessão cujo conjunto de chegada seja IR diz-se uma **sucessão de números reais.**

Vejamos um exemplo,

$$u : \text{IN} \longrightarrow \text{IR}$$

$$n \longrightarrow u(n) = \frac{2n-4}{3}$$

A expressão $u(1) = -\frac{2}{3}$ pode ser representada por $u_1 = -\frac{2}{3}$.
Este termo diz-se o termo de 1ª ordem ou primeiro termo da sucessão.

O termo de 2ª ordem ou segundo termo é: $u(2) = u_2 = 0$

O 9º termo é $u(9) = u_9 = \frac{14}{3}$

O termo de ordem p é : $\boldsymbol{u(p) = u_p} = \frac{2\boldsymbol{p}-4}{3}$

Em geral quando nos referimos ao termo de ordem n, escrevemos u_n.

Ao termo de ordem n, u_n , chama-se **termo geral** da sucessão.

A sucessão dos números pares: 2,4,6,8,..... $u_n = 2n$

A sucessão dos números ímpares: 1,3,5,7,.... $u_n = 2n-1$

As sucessões cujos termos são todos iguais entre si (sucessões constantes), tal como: 2,2,2,..........2,.......... $u_n = 2$

Tarefa 3

a) Qual o 8º e 9º termos quadrangulares?

b) Averigua se 500 é número triangular.

Tarefa 4

Determina os 10º e 11º termos da sucessão de Fibonacci.

Tarefa 5

Escreve os seis primeiros termos de cada uma das sucessões de termos inteiros positivos:

a) Múltiplos de 3

b) Potências de base três

Tarefa 6

Considera a sucessão (a_n) definida por recorrência :

$a_1 = -1 \; e \, a_{n+1} = n \times a_n \;\; (n>1)$

Determina os 4 primeiros termos da sucessão.

Tarefa 7

Define por recorrência a seguinte sucessão cujos primeiros quatro termos são:

$u_1 = 1$

$u_2 = 1 + \frac{1}{4}$

$u_3 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}$

$u_4 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16}$

Tarefa 8

Considera a sucessão (u_n) cujo termo geral é dado por

$u_n = \dfrac{n+9}{n}$

a) Calcula a soma dos dois primeiros termos da sucessão.

b) Determina, caso exista, a ordem do termo que é igual a dois.

c) Determina a ordem a partir da qual os termos são inferiores a $\frac{3}{2}$.

As sucessões cujos termos, a partir de certa ordem, são todos iguais entre si (sucessões quase constantes), tal como:

2, 3,4,6,5,5,5,.......,5,.....

A sucessão definida por: $u_n = \begin{cases} 2n & para\, n < 4 \\ \\ 5 & para\, n \geq 4 \end{cases}$

Se os termos da sucessão se podem determinar a partir de termos anteriores conhecidos, diz-se que a sucessão está definida por **recorrência.**

Numa sucessão (a_n) tem-se que o primeiro termo é 5 e qualquer termo da sucessão diferente do primeiro obtém-se do anterior adicionando-lhe duas unidades.

Então a expressão que permite encontrar os termos da sucessão é:

$$\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_n = a_{n-1} + 2 \;,\; n > 1 \end{cases}$$

Numa sucessão (b_n) sabe-se que $b_1 = 2$ e cada termo, com exceção do primeiro, é o triplo do anterior. Ou seja:

2; 6; 18; ...., b_n , $3b_n$, ...

A sucessão f, cujos termos são os números de Fibonacci, pode ser definida por:

$$\begin{cases} f_1 = 1 \\ f_2 = 1 \\ f_n = f_{n-2} + f_{n-1}, \;\; ,n \geq 3 \end{cases}$$

Uma sucessão de números reais fica definida se for dado o seu termo de ordem n ou termo geral u_n.

Exemplos:

1. Dado o termo geral $u_n = \dfrac{n+1}{2n-3}$ de uma sucessão de números reais, calcular:

a) O 4º e o 7º termo

$$u_4 = \frac{4+1}{2\times4-3} = 1 \qquad u_7 = \frac{7+1}{2\times7-3} = \frac{8}{11}$$

b) $u_{n+2} - u_{n+1}$

$$u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{n+2+1}{2(n+2)-3} - \frac{n+1+1}{2(n+1)-3} = \frac{-5}{4n^2-1}$$

2. Definida a sucessão (a_n) pelo seu termo geral, $a_n = \dfrac{2n-1}{n+3}$.

Mostra que :

a) $\dfrac{29}{18}$ é termo da sucessão e calcula a sua ordem.

$$a_n = \frac{29}{18} \Leftrightarrow \frac{2n-1}{n+3} = \frac{29}{18} \Leftrightarrow n = 15$$

Então , $\dfrac{29}{18}$ é o termo de ordem 15 da sucessão.

b) $\dfrac{8}{5}$ não é termo da sucessão

$$\frac{2n-1}{n+3} = \frac{8}{5} \Leftrightarrow 2n = 29 \Leftrightarrow n = \frac{29}{2}$$

Como a equação é impossível em IN, $\dfrac{29}{2} \notin IN$, $\dfrac{8}{5}$ não é termo da sucessão.

Uma subsucessão de uma sucessão (u_n) é qualquer sucessão formada por termos da sucessão dada.

Por exemplo,

Na sucessão dos números naturais,

1, 2, 3, 4, 5, 6, …., n, …, cujo termo geral é $u_n = n$,

Tarefa 9

Considera a sucessão (u_n) cujo termo geral é $u_n = n^2 - 3$.

Calcula os 4 primeiros termos.

Tarefa 10

Determina os cinco primeiros termos das sucessões, cujos termos gerais são:

a) $a_n = n^3$

b) $b_n = n^3 - n + 2$

c) $c_n = \dfrac{2n-1}{n+3}$

Tarefa 11

a) Determina os três primeiros termos de cada uma das sucessões de termo geral:

$u_n = \dfrac{n+5}{n+1}$

$v_n = 2n - \dfrac{n}{6}$

$w_n = (-1)^n \dfrac{2-n}{n}$

b) Verifica se o número $-\dfrac{5}{6}$ é termo de alguma das sucessões anteriores.

Tarefa 12

Considera a sucessão definida

$$u_n = \frac{2n+1}{n}$$

a) Determina a expressão que define

a1) u_{n+1}

a2) u_{n-1} para n>1

b) Determina o sinal de $u_6 - u_5$

Tarefa 13

Representa graficamente os cinco primeiros termos da sucessão de termo geral:

$$u_n = \frac{10-3n}{2}$$

Tarefa 14

Seja (c_n) a sucessão que tem por termo geral a expressão

$$c_n = \frac{n+2}{n}$$

a) Calcula os termos de ordem 10 e de ordem 24.

b) Verifica que $\frac{7}{6}$ é termo da sucessão.

c) Representa graficamente os cinco primeiros termos da sucessão.

podemos considerar as subsucessões:

- (v_n): 2, 4, 6, 8, 10, ..., 2n, ...

  de termo geral $v_n = 2n$, (sucessão de números pares)

- (w_n): 1, 3, 5, 7, 9, 11, ..., 2n-1, ...

  de termo geral $w_n = 2n-1$, (sucessão de números ímpares).

Representação gráfica de uma sucessão

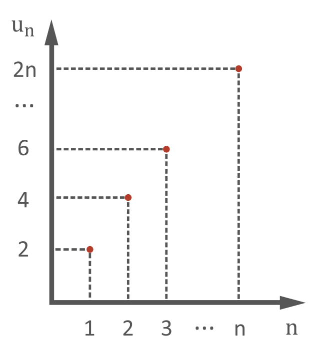
O gráfico de uma sucessão de termo geral u_n é constituída por **todos** os pares ordenados da forma (n, u_n), com $n \in IN$, em que n é o objeto e u_n é a imagem.

Exemplo:

Na sucessão de termo geral : $u_n = 2n$,

Calculamos os primeiros termos :

$$u_1 = 2; u_2 = 4; u_3 = 6; \ldots; u_n = 2n; \ldots$$



Nota que como uma sucessão tem como domínio o conjunto IN a sua representação gráfica é um conjunto de pontos isolados.

Sucessões Monótonas

Consideremos os seguintes termos da sucessão dos números triangulares (t_n):

1; 3; 6; 10; 15; 21; 27; 29;.........

Nesta sucessão, qualquer termo é sempre maior do que o termo que o precede. Podemos escrever:

$t_1 < t_2 < t_3 < \ldots < t_n < t_{n+1} < \ldots \; para\, todo\, n \in IN$

Esta sucessão é **crescente** pois à medida que "n" aumenta, aumentam também os valores dos seus termos.

A sucessão (u_n) é crescente (em sentido estrito) se e só se para todo $n \in IN, u_{n+1} > u_n$. De outra forma, sempre que $u_{n+1} - u_n > 0$ para todo $n \in IN$.

Tarefa 15

Representa graficamente os cinco primeiros termos da sucessão de termo geral $u_n = 10 - 3n$.

Consideremos, agora, os termos da sucessão definida por: $v_n = \dfrac{1}{2n+1}$:

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}, \frac{1}{13}, \frac{1}{15}, \frac{1}{17}, \frac{1}{19}, \ldots$$

Nesta sucessão, qualquer termo é sempre menor do que o termo anterior. Podemos escrever:

$$v_1 > v_2 > v_3 > \ldots > v_n > v_{n+1} > \ldots \; para\, todo\, n \in IN$$

Esta sucessão é **decrescente** porque, à medida que "*n*" aumenta, diminuem os valores dos seus termos.

A sucessão (u_n) é decrescente (em sentido estrito) se e só se, para todo o $n \in IN, u_{n+1} < u_n$. De outra forma, sempre que $u_{n+1} - u_n < 0$ para todo $n \in IN$

Exemplos:

Verificar se as seguintes sucessões são crescentes ou decrescentes:

1. $a_n = 1 - 3n$

   $a_{n+1} - a_n = -3$

Como, $a_{n+1} - a_n < 0$, para todo $n \in IN$, então a sucessão é estritamente decrescente

2. $b_n = \dfrac{2n}{n+1}$

$$b_{n+1} - b_n = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$$

Mas, $\dfrac{2}{(n+1)(n+2)} > 0$, (ambos os termos da fração são positivos)
Então, a sucessão dada é estritamente crescente.

3. $q_n = (-1)^{n}$

Observa que : $q_n = \begin{cases} 1 & se\, n\, é\; par \\ -1 & se\, n\, é\; impar \end{cases}$

Tarefa 16

Indica os cinco primeiros termos e o termo geral de:

a) Uma sucessão cujos termos cresçam sempre

b) Uma sucessão cujos termos decresçam sempre

c) Uma sucessão cujos termos não sejam sempre crescentes ou decrescentes

Para n par, temos que $q_{n+1} - q_n = -1 - 1 = -2$

Para n ímpar, temos $q_{n+1} - q_n = 1 + 1 = 2$

Nesta sucessão, não é possível estabelecer que

$q_{n+1} - q_n > 0$ ou $q_{n+1} - q_n < 0$, para todo $n \in IN$, donde se conclui que a sucessão não e crescente nem decrescente.

A sucessão (u_n) é **monótona** se e só se, para todo $n \in IN$, for sempre crescente ou decrescente.

Nos exemplos anteriores, temos que:

1. $a_n = 1 - 3n$

Como $a_{n+1} - a_n = -3 < 0$ a sucessão dada é sempre decrescente, logo é monótona .

2. $b_n = \dfrac{2n}{n+1}$

Como $b_{n+1} - b_n = \dfrac{2}{(n+1)(n+2)} > 0$ a sucessão dada é sempre crescente, logo é monótona.

- A sucessão (u_n) é crescente (em sentido lato) se e só se para todo $n \in IN, u_{n+1} \geq u_n$. Ou seja, $u_{n+1} - u_n \geq 0$ para todo $n \in IN$.
- A sucessão (u_n) é decrescente (em sentido lato) se e só se, para todo o $n \in IN, u_{n+1} \leq u_n$. Ou seja, $u_{n+1} - u_n \leq 0$ para todo $n \in IN$.

Tarefa 18

Estuda, quanto à monotonia as sucessões a seguir definidas.

a) $a_n = \frac{5}{2n}$

b) $b_n = \frac{n+1}{2n-3}$

c) $c_n = 1 + 3n$

d) $d_n = n^2 - 13n + 4$

e) $e_n = \frac{n}{n+1}$

f) $f_n = \frac{(-1)^{2n}}{n}$

Exemplos:

1. $v_n = \begin{cases} v_1 = 2 \\ v_2 = 5 \\ v_n = 9, \quad para\, todo\, n \geq 3 \end{cases}$

Observa que $v_2 - v_1 = 3 \quad e \; v_{n+1} - v_n = 0$, para $n \geq 3$

Temos que $v_{n+1} - v_n \geq 0$, $\forall n \in IN$

2. A sucessão de Fibonacci $\begin{cases} f_1 = 1 \\ f_2 = 1 \\ f_n = f_{n-2} + f_{n-1} \end{cases}$

Para todo n >1 temos $f_{n+1} - f_n > 0$ e como $f_1 = 1 \quad e \quad f_2 = 1$, $f_{n+1} - f_n \geq 0$

Sucessões limitadas

Dado um conjunto X de números reais, chama-se **majorante** de X a um número real m, tal que $x \leq m$, qualquer que seja $x \in X$.

Qualquer número positivo ou o zero é majorante do conjunto dos números reais negativos.

Dado um conjunto X de números reais, chama-se **minorante** de X a um número real n, tal que $x \geq n$, qualquer que seja $x \in X$.

Qualquer número negativo ou o zero é minorante do conjunto dos números reais positivos.

Se um conjunto for simultaneamente majorado e minorado diz-se limitado.

Exemplos:

Seja o conjunto $A=\{-3,,-2,-1,0,1,2\}$

Podemos afirmar que 2 é majorante e -3 é um minorante, logo o conjunto A é limitado.

Tarefa 19

Considera o conjunto

$$A=\left\{1;3;\frac{11}{2};8\right\}$$

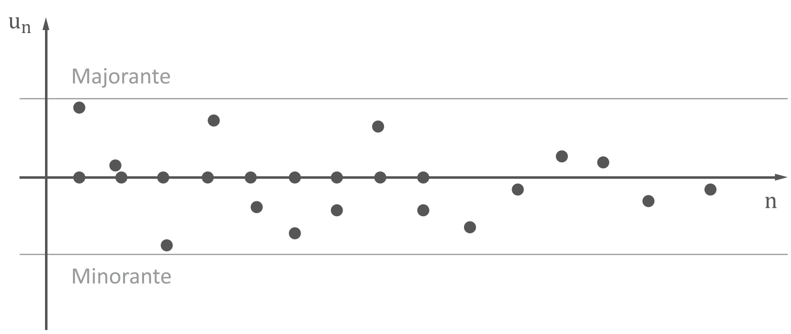
a) Qual é o conjunto de todos os números reais maiores que qualquer elemento do conjunto A?

b) Qual é o conjunto de todos os números reais menores que qualquer elemento do conjunto A?

Uma sucessão de números reais diz-se **limitada** se o conjunto dos seus termos for um conjunto limitado, em IR. Ou seja uma sucessão diz-se limitada se o conjunto dos seus termos admite um majorante e um minorante.

$$a \le u_n \le b \quad Para\,todo\,o\,n \in IN, com\,a,b \in \mathbb{R}\,e\,a<b$$

Graficamente:



Tarefa 20

Averigua se as seguintes sucessões são limitadas ou não

a) $a_n=\dfrac{n-1}{n+2}$

b) $b_n=(-1)^n$

c) $c_n=\dfrac{5n+3}{n}$

d) $d_n=2n+9$

e) $e_n=\dfrac{1-n}{n}$

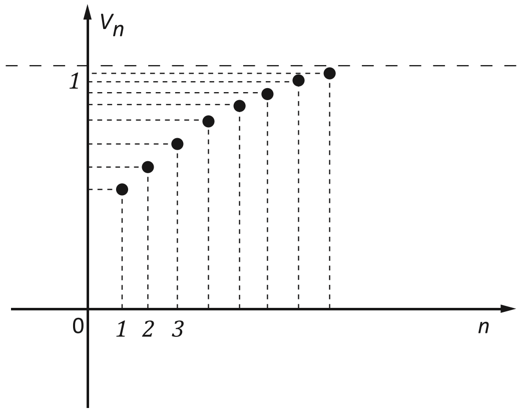
f) $g_n=(-1)^n \times n$

Exemplos:

A sucessão $u_n=(-1)^n$ é limitada, pois o conjunto dos seus termos {-1;1} é um conjunto limitado.

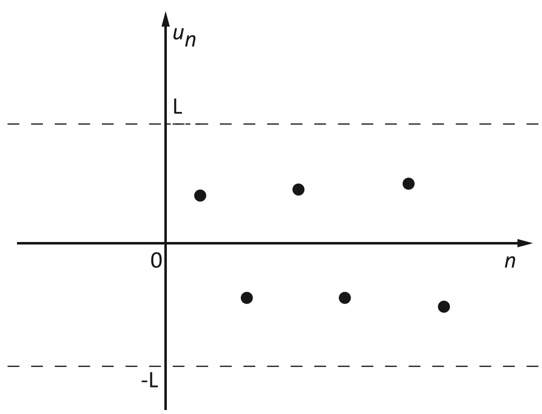
A sucessão $v_n=\dfrac{n}{n+1}$ é limitada.

Observa que $v_n=1-\dfrac{1}{n+1}$ todos os termos da sucessão são positivos maiores que 0 e menores que 1.



Então, $0 < v_n < 1$, para todo $n \in IN$, temos um minorante que é 0 e um majorante que é 1. Mas, também podemos dizer que a sucessão -1< $v_n < 1$, ou seja $|v_n| < 1$.

Uma sucessão (u_n) diz-se limitada se e só se existe um número real positivo L tal que : $|u_n| < L \Leftrightarrow -L < u_n < L$, para todo $n \in IN$.



Exemplo:

Prova que a sucessão de termo geral $u_n = \frac{-5n+1}{n}$ é limitada.

Resolução: Temos que $u_n = \frac{-5n+1}{n} = -5 + \frac{1}{n}$,

como $0 < \frac{1}{n} < 1$ para todo $n \in IN$, vem que $-5 < u_n < -4$.

Ou seja, podemos escrever que $-5 < u_n < 5 \Leftrightarrow |u_n| < 5$,$n \in IN$.

A sucessão é limitada . Neste caso L pode ser 5.

Tarefa 21

Considera as sucessões

$$a_n = \frac{n}{n+3} \qquad b_n = \frac{4n+1}{n}$$

a) Justifica que (b_n) é uma sucessão limitada.

b) Será que 20 é majorante de (a_n)?

Tarefa 22

Considera a sucessão cujo termo geral é :

$$u_n = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \text{ se } n \text{ é ímpar} \\ 3 + \frac{1}{n} \text{ se } n \text{ é par} \end{cases}$$

a) Representa graficamente os 10 primeiros termos.

b) Mostra que a sucessão é limitada.

Progressões aritméticas

Considera a seguinte sucessão (u_n) definida por recorrência

$$\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \quad para\, n > 1 \end{cases}$$

Alguns termos da sucessão são:

4; 7; 10; 13; …

Verifica que $u_{n+1} - u_n = 3$. Ou seja, a diferença entre cada termo e o anterior é sempre constante e igual a 3.

Tarefa 23

Indica as que são progressões aritméticas indicando a respetiva razão

$$a_n = 6 + \frac{n-3}{3}$$

$$b_n = (2)^n$$

$$c_n = \frac{1}{n+1}$$

$$d_n = \frac{5}{4} - \frac{3}{2}n$$

Chama-se progressão aritmética a toda a sucessão em que é constante a diferença entre qualquer termo (diferente do primeiro) e o que o precede.

$$u_{n+1} - u_n = r\,(constante),\; para\, todo\, n \in IN$$

A constante r dá-se o nome de **razão da progressão.**

Considera a situação:

Quando a quantidade de água de um reservatório atinge o mínimo de $5m^3$ *é aberta uma torneira automaticamente despejando-se* $4m^3$ *de água por hora, neste reservatório, até completar sua capacidade, que é de 45* m^3.

Tarefa 24

Escreve uma expressão do termo geral de uma progressão aritmética:

a) Monótona crescente cujo primeiro termo é negativo.
b) Monótona decrescente cujo primeiro termo é positivo.

A sucessão a seguir apresenta a quantidade, em m^3, contida no reservatório, de hora em hora, a partir do instante que foi atingida a quantidade mínima: 5,9,13,17,21,25,29,33,37,41,45

Esta sequência obtém-se adicionando-se uma mesma constante a cada termo. (Neste caso a razão da progressão é 4).

Toda progressão aritmética (u_n) de razão *r* é uma sucessão monótona:

Crescente se *r > 0*

Decrescente se *r < 0*

Constante se *r = 0*

Tarefa 25

Considera a sucessão dos números pares positivos.

a) Justifica que se trata de uma progressão aritmética crescente.

b) Qual é o termo de ordem 50?

c) Escreve a expressão do termo geral.

Exemplos:

1. Considera a sucessão de termo geral: $u_n = 1 - 3n$.

$$u_{n+1} - u_n = 1 - 3(n+1) - (1 - 3n) = -3$$

Então a sucessão dada é uma progressão aritmética de razão -3. (monótona decrescente).

2. A sucessão de termo geral $u_n = 2n - 3$ é uma progressão aritmética de razão 2, monótona crescente, pois para todo número natural n, $u_{n+1} - u_n = 2(n+1) - 2n + 3 = 2$

Tarefa 26

Numa progressão aritmética, o quarto e o sexto termos são respectivamente, 21 e 15. Qual o termo geral da sucessão?

Expressão do termo geral de uma progressão aritmética

Seja (u_n) uma progressão aritmética de razão r

$$u_1 \; ; u_2 ; \; u_3 \; ; \ldots ; u_n ; \ldots$$

Verifica que:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1 \\ u_2 &= u_1 + r \\ u_3 &= u_1 + r + r = u_1 + 2r \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$u_n = u_1 + \underbrace{r + \ldots\ldots\ldots\ldots + r}_{(n-1)\,parcelas} = u_1 + (n-1)r$$

Tarefa 27

Determina em cada caso, uma expressão do termo geral da progressão aritmética de que se conhece:

a) $a_8 = 13 \;\; e \;\; a_{17} = 8$

b) $d_1 = -\dfrac{1}{2} \; e \; r = 5$

c) $w_{21} = 1 \;\; e r = \dfrac{1}{5}$

Então, o termo geral de uma progressão aritmética (u_n) de razão r e primeiro termo u_1 é dado por:

$$u_n = u_1 + (n-1)r$$

Exemplos:

Numa progressão aritmética de razão -7 e primeiro termo 18, determina o termo de ordem seis.

Referência histórica

Carl Friedrich Gauss

1777-1855

Conta-se que o matemático alemão Gauss, ainda muito novo, como aluno do ensino básico, surpreendeu o seu professor quando este propôs aos seus alunos que calculassem o valor da soma dos números inteiros de 1 a 100. Gauss terá respondido passado pouco tempo, utilizando a estratégia indicada a seguir

$$\begin{array}{r}
1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 98 + 99 + 100 \\
100 + 99 + 98 + 97 + \ldots + 3 + 2 + 1 \\
\hline
101 + 101 + 101 + 101 + \ldots + 101 + 101 + 101
\end{array}$$

Com este processo obteve 100 vezes a parcela 101. Isto significa que adicionando duas vezes os números inteiros de 1 a 100, se obtém como resultado 10100. Desta forma, a resposta à questão proposta pelo professor é de 5050. (10100:2).

Podemos começar por determinar o termo geral da sucessão.

$$u_n = 18 + (n-1)(-7)$$
$$u_n = 25 - 7n$$

Depois, o termo de ordem seis é dado por

$$u_6 = 25 - 7(6) = -17$$

Numa progressão aritmética o termo de ordem quatro é 10 e a razão é -6. Determina o termo geral da progressão.

Temos que:

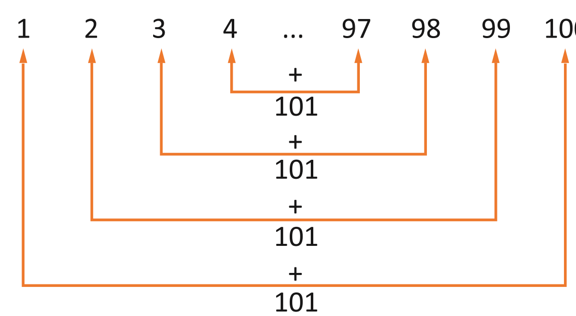
$$u_4 = u_1 + 3r \Leftrightarrow 10 = u_1 + 3(-6) \Leftrightarrow u_1 = 28$$

Substituindo os valores do primeiro termo e da razão na expressão do termo geral da progressão obtemos:

$$u_n = 28 + (n-1)(-6) \Leftrightarrow u_n = 34 - 6n$$

Soma dos n termos consecutivos de uma progressão aritmética

A estratégia de Gauss é ilustrada no seguinte diagrama:



Nesta estratégia, a soma do 1º com o último é igual à soma do 2º com o penúltimo, o 3º com o antepenúltimo e assim sucessivamente, de modo a que a soma de quaisquer dois termos equidistantes dos extremos é igual.

Ou seja:

- A soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual a soma dos extremos.
- O dobro do termo médio é igual a soma dos extremos.
- Estas afirmações são verdadeiras em qualquer progressão aritmética.

Consideremos os sete primeiros termos da progressão aritmética de termo geral $a_n = 3 + 5n$

Consideramos os sete primeiros termos da sucessão

$$u_1 = 8\ ; u_2 = 13\ ; u_3 = 18\ ; u_4 = 23;\ u_5 = 28; u_6 = 33\ ; u_7 = 38$$

Calculamos:

- A soma dos extremos

$$u_1 + u_7 = 46$$

- A soma dos termos equidistantes dos extremos

$$u_2 + u_6 = 46 \qquad u_3 + u_5 = 46$$

- O dobro do termo médio

$$2u_4 = 2 \times 23 = 46$$

Usando esta relação vamos estabelecer a expressão que permite de determinar a soma dos *n* primeiros termos de uma progressão aritmética.

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n$$

Ou,

$$S_n = u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + \ldots + u_3 + u_2 + u_1$$

adicionando membro a membro, temos:

$$2S_n = \underbrace{(u_1 + u_n) + (u_2 + u_{n-1}) + \ldots + (u_{n-1} + u_2) + (u_n + u_1)}_{n-parcelas}$$

Sendo cada uma destas parcelas igual, a soma dos extremos é igual a

$$2S_n = (u_1 + u_n) \times n$$

$$\boldsymbol{S_n = \frac{(u_1 + u_n)}{2} \times n}$$

A expressão anterior permite encontrar a soma dos n termos consecutivos de uma progressão aritmética

Tarefa 29

Determina a soma dos vinte e cinco primeiros termos das progressões aritméticas de termos gerais:

a) $v_n = 2n - 3$

b) $w_n = \frac{n+1}{3}$

c) $t_n = \frac{1-n}{2}$

Tarefa 30

Determina a soma dos 10 primeiros termos consecutivos a partir do 5º inclusive, das progressões aritméticas de termo geral:

a) $q_n = 5n - 27$

b) $g_n = 5 + \frac{n}{3}$

c) $v_n = \frac{28 - n}{2}$

Exemplos:

1. Calcula a soma dos vinte primeiros números pares.

A sucessão dos números pares é uma progressão aritmética de razão 2 em que o primeiro termo também é 2.

$$a_n = 2 + (n-1) \times 2 \Leftrightarrow a_n = 2n$$

$$S_{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2} \times 20$$

$$S_{20} = \frac{2 + 40}{2} \times 20 = 420$$

2. Considera a progressão aritmética definida por $v_n = 3n - 1$. Calcula a soma 20 termos consecutivos a começar no termo de ordem 15.

1º Processo

$$S = S_{34} - S_{14} = \frac{v_1 + v_{34}}{2} \times 34 - \frac{v_1 + v_{14}}{2} \times 14 = 1450$$

2º Processo

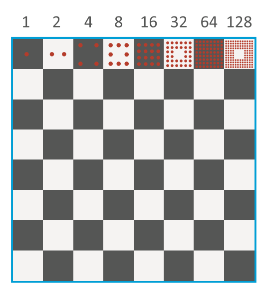
$$S = \frac{v_{15} + v_{34}}{2} \times (34 - 15 + 1) = 1450$$

A LENDA DE SISSA

Uma famosa lenda atribui a criação do xadrez ao filósofo indiano Lehur Sissa. Ele teria inventado o jogo para acabar com a agonia de um rajá que perdera o seu filho numa batalha. Sissa apresentou o xadrez ao poderoso rajá, informando-o que a sua prática traria conforto espiritual. Maravilhado com o xadrez, o rajá disse a Sissa que poderia pedir qualquer coisa como recompensa.

Progressões geométricas

Sissa pediu simplesmente um grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro, dois grãos pela segunda, quatro pela terceira, oito pela quarta e assim por diante, dobrando a quantidade anterior, em progressão geométrica até chegar à casa que correspondia ao número sessenta e quatro.



Com um pedido tão simples e aparentemente tão humilde, o rajá cedeu e pediu aos tesoureiros do reino que o contabilizassem.

A Surpresa foi quando o rei foi informado que não haveria trigo na India suficiente para pagar a recompensa prometida. O número de grãos que Sissa tinha pedido, corresponde à subtração de $2^{64} - 1$, ou seja: 18.446.744.073.709.551.615 grãos de trigo.

Considerando a sequência do número de grãos de trigo para cada quadrado do tabuleiro, temos a sucessão, 1, 2, 4, 8, 16, ….

Verifica-se que cada termo da sucessão obtém-se do anterior, multiplicando-o por 2. A esta sucessão chamamos de progressão geométrica em que o quociente entre quaisquer dois termos consecutivos é constante (razão da progressão).

Uma progressão geométrica é toda a sucessão (u_n) em que é constante o quociente entre quaisquer dois termos consecutivos (nenhum termo é nulo).

Sendo (u_n) é uma progressão geométrica de razão ***r***, temos que:

$u_{n+1} = u_n r, \, para\, todo\, n \in \mathbb{N}$, que é equivale a:

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = r, sempre\, que\, u_n \neq 0, para\, todo\, n \in \mathbb{N}$

À constante r dá-se o nome de **razão da progressão**.

Tarefa 31

Seleciona de entre as sucessões, as que são progressões geométricas indicando a respetiva razão.

a) $a_n = -3^n$

b) $c_n = 2^n - n$

c) $d_n = -\frac{1}{2^n}$

d) $r_n = n^2 - n$

Exemplos:

1. Prova que a seguinte sucessão de termo geral $v_n = 3 \times 6^{n-2}$ é uma progressão geométrica e classifica-a quanto à monotonia.

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{3 \times 6^{n-1}}{3 \times 6^{n-2}} = 6 \quad (constante), \forall n \in IN$$

Podemos afirmar que (v_n) *é uma progressão geométrica*

Como $r = 6$ $a_1 = \frac{1}{2}$ a sucessão é monótona crescente.

2. Considera a seguinte progressão geométrica $a_n = -5^{-n}$.

Estuda a sucessão dada quanto à monotonia.

$$r = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{-5^{-n-1}}{-5^{-n}} = \frac{1}{5}$$

Como $a_1 = -\frac{1}{5} < 0$ e $0 < r < 1$ a progressão é monótona decrescente.

Expressão do termo geral de uma progressão geométrica

Consideremos uma progressão geométrica (u_n), com $u_1 \neq 0\, e\, r \neq 0$.
Utilizando a definição de progressão geométrica:

$$\frac{u_2}{u_1}=r \Leftrightarrow u_2=u_1 r$$

$$\frac{u_3}{u_2}=r \Leftrightarrow u_3=u_2 r=u_1 r^2$$

$$\frac{u_4}{u_3}=r \Leftrightarrow u_4=u_3 r=u_1 r^3$$

$$(\ldots)$$

$$\frac{u_n}{u_{n-1}}=r \Leftrightarrow u_n=u_{n-1} r=u_1 r^{n-1}$$

Então, o termo geral de uma progressão geométrica (u_n), de primeiro termo u_1 e razão r, é dada por: $u_n=u_1 r^{n-1}$

Nota que:

- Se $r > 1$ a sucessão é monótona crescente (a_1>0) ou decrescente (a_1<0):
- Se $r = 1$ a sucessão é monótona constante (todos os termos são iguais ao primeiro).
- Se $0< r <1$ a sucessão é monótona decrescente (a_1<0), ou crescente (a_1>0).
- Se $r < 0$ a sucessão é não monótona (os termos são alternadamente positivos e negativos).

Exemplo:

Numa progressão geométrica de razão 3, o primeiro termo é $\frac{1}{27}$. Determina o sétimo termo.

O termo geral da progressão é $u_n=\frac{1}{27}\times 3^{n-1} \Leftrightarrow u_n=3^{n-4}$

Então o sétimo termo é $u_7=3^3=27$

Tarefa 32

Estuda quanto à monotonia as progressões geométricas tais que:

a) $u_1=-2 \quad e \quad r=\frac{1}{2}$

b) $u_n=3\left(-\frac{1}{3}\right)^n$

c) $\begin{cases} u_1=7 \\ u_n=\dfrac{u_{n-1}}{3} \end{cases}$

d) $\begin{cases} u_1=-3 \\ u_n=2u_{n-1} \end{cases}$

Soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica

Consideramos os n primeiros termos de uma progressão geométrica (u_n) de razão $r \neq 1$:$u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots, u_n$, queremos encontrar uma expressão que nos permita calcular a soma S_n de esses termos:

$$S_n=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n$$

Sendo $u_2=u_1 r$; $\quad u_3=u_1 r^2$; ...., $\quad u_n=u_1 r^{n-1}$

$$S_n=u_1\left(1+r+r^2+\ldots+r^{n-1}\right)$$

$$rS_n=u_1\left(r+r^2+r^3\ldots+r^n\right)$$

Subtraindo membro a membro estas duas equações obtemos:

$$S_n-rS_n=u_1\left(1-r^n\right)$$

$$\boldsymbol{S_n=u_1\frac{1-r^n}{1-r} \quad para\ todo\ n\in \mathbb{N} \wedge r\neq 1}$$

Nota que, quando a razão é igual a um não podemos usar a expressão anterior e nesse caso, $S_n = nu_1$.

Exemplos:

1. Calcular a soma das primeiras dez potências de base dois e expoente natural.

$$2+2^2+2^3+\ldots+2^{10}$$

A sucessão dada é uma progressão geométrica de razão 2 e cujo primeiro termo também é 2.

$$S_{10} = a_1\frac{1-r^{10}}{1-r} = 2\frac{1-2^{10}}{1-2} = 2046$$

2. Calcular a soma dos primeiros 12 termos da sucessão de termo geral $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$.

A sucessão dada é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$.

$$S_{12} = u_1\frac{1-r^{12}}{1-r} = 2\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{12}}{1-\frac{1}{2}} = 4\left(1-\frac{1}{2^{12}}\right) = 4-2^{-10}$$

3. Determinar a soma dos 25 primeiros termos de uma progressão geométrica cujo primeiro termo é 5 e de razão 1.

$$S_{25} = 25\times a_1 = 25\times 5 = 12$$

Tarefa 33

Determina expressões dos termos gerais das progressões geométricas de que se conhece:

a) r = 2 e a_1 = -2

b) b_6 = 1 e b_7 = 7

Tarefa 34

Determina soma dos seis primeiros termos da progressão geométrica conhecidos os termos:

$$u_5 = 9 \quad e \quad u_8 = \frac{1}{3}$$

Tarefa 35

Numa colheita laboratorial de bactérias observou-se que no final do 1º minuto havia 4 bactérias, no final do 2º minuto havia 16 bactérias, no final do 3º minuto havia 64 bactérias e assim sucessivamente.

a) Quantas bactérias há no final do 7º minuto? E no final do 10º?

b) Justifica que se trata de uma progressão geométrica e escreve a expressão do seu termo geral.

Exercícios e problemas

1. Dada a sucessão (u_n) de termo geral: $u_n = \dfrac{4+n}{n+1}$

1.1. Determina os três primeiros termos da sucessão

1.2. Averigua se $-\dfrac{3}{2}$ é termo da sucessão

1.3. Determina a ordem depois da qual: $u_n \geq \dfrac{1}{2}$

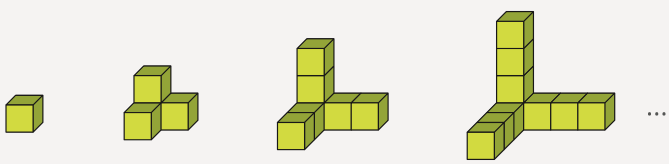
1.4. Averigua se a sucessão é monótona

2. Estuda quanto à monotonia as sucessões de termo geral:

2.1. $a_n = \dfrac{2n-3}{n+1}$

2.2. $b_n = (-1)^n \dfrac{3n}{4}$

3. Consideremos a seguinte sequência de figuras



3.1. Indica o quinto termo da sequência

3.2. Qual é o termo geral da sucessão?

4. Considera a seguinte sucessão $a_n = \dfrac{4n+1}{n}$

4.1. Calcula o 7º e o 10º termo da sucessão

4.2. Verifica se $\dfrac{21}{5}$ é termo da sucessão dada, em caso afirmativo indica a sua ordem

4.3. Estuda a sucessão quanto a monotonia

4.4. A sucessão é limitada ? Justifica

5. Considera a seguinte sucessão: $a_n = \begin{cases} \dfrac{2}{n} & se \quad n \ é \ par \\ -\dfrac{1}{n} & se \quad n \ é \ impar \end{cases}$

5.1. Estuda a monotonia

5.2. Verifica se 0,99 é termo da sucessão

6. Considera a sucessão $b_n = 5 - \frac{24}{n}$

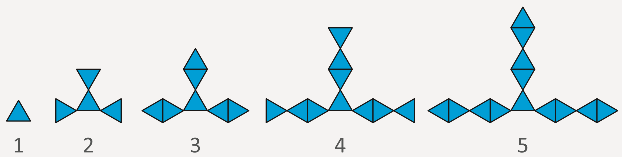
6.1. Mostra que se trata de uma sucessão crescente

6.2. Prova que a sucessão é limitada

6.3. Indica o maior dos minorantes

6.4. Indica três majorantes.

7. Mantendo a lei de formação que figura sugere, o termo geral da sucessão (u_n) designa o número de triângulos do termo n.



7.1. Desenha o termo de ordem seis e sete da sucessão

7.2. Define a sucessão por recorrência

7.3. Existe alguma figura com 501 triângulos? Justifica

8. Seja (u_n) uma progressão aritmética em que a soma dos dois primeiros termos é o dobro da razão e o termo de ordem quatro é 7.

8.1. Determina a razão e o primeiro termo

8.2. Escreve o termo geral da progressão

8.3. Verifica se 16 é termo da sucessão

8.4. Calcula a soma dos 8 primeiros termos.

9. Considera uma progressão aritmética (u_n) em que $u_2 + u_5 = 19 \quad e \quad u_7 - u_4 = 9$

9.1. Determina o primeiro termo e a razão

9.2. Escreve o termo geral da progressão

9.3. Determina a soma dos seis primeiros termos

9.4. Estuda a progressão quanto à monotonia.

10. Escreve o termo geral de uma progressão geométrica sabendo que

10.1. $a_1 = 8 \quad e \quad r = 6$

10.2. $a_2 = 8$ e $a_5 = 27$

11. Calcula a soma dos 55 primeiros termos da progressão aritmética definida pelo seguinte termo geral $u_n = 2n - 3$

12. Averigua se a sucessão de termo geral $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+2}$ é uma progressão geométrica

13. Determina o termo de ordem 42 de uma progressão geométrica sabendo que $a_1 = 6 \ e \ a_2 = -4$

14. Escreve os cinco primeiros termos:

14.1 Da sucessão dos números que são quadrados perfeitos

14.2 Da sucessão dos inversos dos múltiplos de cinco

15. Dada a sucessão de termo geral $u_n = \frac{3n+1}{2n+1}$

15.1. Determina u_6 e u_{10}

15.2. Determina $u_{p+1} - u_p$

15.3. Verifica se $\frac{3}{7} \ e \ \frac{16}{11}$ são termos da sucessão e em caso afirmativo indica a sua ordem.

16. Dada a sucessão, definida por recorrência: $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = 3a_n \quad para \, n > 1 \end{cases}$

16.1. Escreve os quatro primeiros termos da sucessão.

16.2. Averigua se a sucessão dada é uma progressão geométrica

17. Considera a seguinte sucessão (w_n) definida do seguinte modo:

$$\begin{cases} w_1 = 3 \\ w_2 = 0 \\ w_n = w_{n-1} + w_{n-2} \qquad para \, n > 2 \end{cases}$$

Determina $w_5 + w_3$

18. Representa graficamente os cinco primeiros termos da sucessão de termo geral $u_n = (-1)^n \frac{2n}{3}$

19. Verifica se são ou não limitadas as sucessões de termos gerais:

$a_n = 2n \qquad b_n = \frac{2}{n} \qquad e_n = \frac{(-1)^n}{n} \qquad d_n = (n-3)^2 \qquad c_n = 2 + \frac{1}{n}$

20. Considera a sucessão de termo geral: $a_n = \frac{2-n}{n}$

201. Estuda a sucessão quanto à monotonia.

20.2. Mostra que a sucessão é limitada, indicando um majorante e um minorante.